Tema 1
I.2. Sistemas de Ecuaciones

Álgebra. 1º IEC

I.2. Sistemas de Ecuaciones Lineales

- **I.2.1. Ecuaciones y sistemas lineales**
  - **I.2.1.1. Tipos de sistemas**
  - **I.2.1.2. Sistemas escalonados**
  - **I.2.1.3. Teorema de existencia y unicidad**
- **I.2.2. Resolución de sistemas de ecuaciones**
  - **I.2.2.1. Equivalencia por filas**
  - **I.2.2.2. Método de Gauss**
    - **Box.I.2.1. Algoritmo de Eliminación de Gauss-Jordan**
  - **I.2.2.3. Sistemas homogéneos e inhomogéneos**

I.2. Sistemas de Ecuaciones Lineales

I.2.1. Ecuaciones y sistemas lineales

I.2.1.1. Tipos de sistemas

Una ecuación lineal es una expresión en n variables $x_1, x_2, \dots x_n$ de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n = b$ con $b, a_i \in K$ (escalares) y $n \in \mathbb{N}$.

b - constante de la ecuación o término independiente; a_i - coeficientes; x_i – incógnitas. $a_1 \neq 0$ es la entrada principal y x_1 la variable dominante.

Nota: Las ecuaciones lineales no contienen productos, potencias o raíces de variables, ni funciones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas de las variables.

Ecuaciones lineales con una incógnita

Teorema. Sea la ecuación $ax = b$.

i) Si $a \neq 0 \Rightarrow x = a^{-1} \cdot b$ es solución única (sistema compatible determinado). x es una variable básica

ii) Si $a = 0, b \neq 0 \Rightarrow$ la ecuación no tiene solución (sistema incompatible)

iii) $a = 0, b = 0 \Rightarrow \ \forall x = k \in K$ es solución (sistema compatible indeterminado). x es una variable libre

Ecuaciones lineales con varias incógnitas

Teorema. Dada la ecuación degenerada $0x_1 + 0x_2 + \ ... 0x_n = b$ entonces:

i) si $b \neq 0 \Rightarrow$ la ecuación no tiene solución

ii) si $b = 0 \Rightarrow$ todo vector $\vec{x} = (k_1, k_2, ... k_n) \in K^n$ es solución

Sea una ecuación lineal no degenerada $a_1x_1 + a_2x_2 + \ ... a_nx_n = b$ con entrada principal x_p (o sea la primera entrada no nula $a_p \neq 0$). Entonces:

i) la incógnitas x_j con $j \neq p$ se llaman variables libres (pueden tomar cualquier valor)

ii) x_p es una variable básica (determinada a partir de las variables libres)

Sistema de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones lineales es una colección de una o más ecuaciones que involucran las mismas variables $x_1, x_2, ... x_n$, esto es, un conjunto de m ecuaciones (cada una lineal) en las mismas n variables.

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ ... a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ ... a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ ... a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

$a_{ij}, b_j \in K$. b_j son los términos independientes. La primera entrada no nula de cada ecuación del sistema de ecuaciones se llama **entrada principal**.

El sistema puede representarse en forma abreviada como:

- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1,2, \dots m.$ a_{ij} es el coeficiente de x_j en la ecuación *i*-ésima.

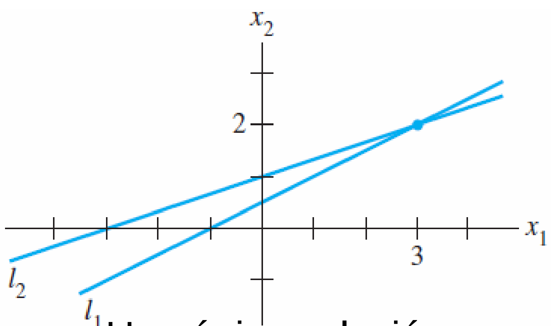
- Ecuación vectorial: $x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ o $x_1\vec{a}_1^c + x_2\vec{a}_2^c + \cdots + x_n\vec{a}_n^c = \vec{b}$

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ con } A = [\vec{a}_1^c \ \ \vec{a}_2^c \dots \ \vec{a}_n^c] \text{ y } \vec{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$$

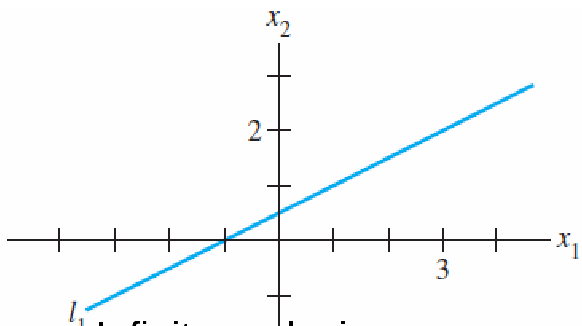
donde $\vec{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{m1})$ son vectores (o matrices) columnas. Si el sistema tiene solución se dice que $\vec{b}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{a}_j$

- Notación matricial: $A \cdot X = B$ siendo $A = (a_{ij})$ la matriz de coeficientes de cada variable, $B = (b_1, b_2, \dots b_m)$ la matriz columna de términos independientes, $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$ la matriz columna de las incógnitas. Cada sistema de ecuaciones tiene asociado una matriz ampliada, que se denota por AB, $[A|B]$ o $[A \ \ \vec{b}]$ y es aquella con los coeficientes y términos constantes del sistema

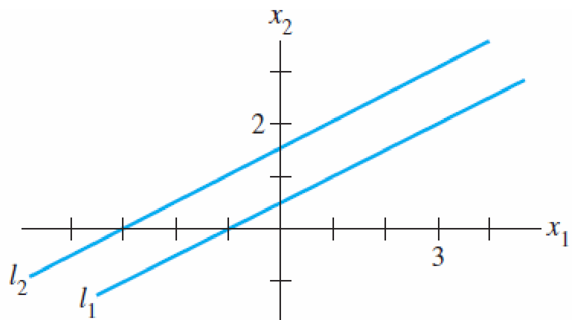
$$[A\,|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} \dots & & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$



Una única solución
(compatible determinado)



Infinitas soluciones
(compatible indeterminado)



No hay solución
(incompatible)

I.2.1.2. Sistemas escalonados

<u>Sistema escalonado por filas</u>: Un sistema está en forma escalonada por filas si la primera entrada no nula de cada ecuación está a la derecha de la de la ecuación anterior:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{2j_2}\, x_{j_2} + a_{2j_2+1}\, x_{j_2+1} + \ \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{rj_r}\, x_{j_r} + a_{rj_r+1}\, x_{j_r+1} + \ \dots a_{rn}x_n = b_r \end{array}\right\}$$

donde $1 < j_2 < j_r$ y $a_{11} \neq 0, a_{2j_2} \neq 0, a_{rj_r} \neq 0$ (número de entradas principales: $r \leq n$). Si x_k no es la primera incógnita de ninguna ecuación ($x_k \neq x_1, x_k \neq x_{j_2}, \dots, x_k \neq x_{j_r}$) será una variable libre.

Nota: Los sistemas escalonados por filas pueden resolverse por sustitución hacia atrás o regresiva, despejando la incógnita de la última ecuación y sustituyendo de abajo a arriba.

Sistema (o matriz) escalonado (por filas): i) las filas nulas, si las hay, ocupan las posiciones de más abajo; ii) dadas dos filas no nulas la entrada principal de la fila superior está más a la izquierda (o sea, cada fila tiene algún cero más que la fila anterior) de modo que las entradas debajo de una entrada principal son cero.

Sistema (o matriz) escalonado reducido (por filas): iii) en cada fila no nula, el primer elemento no nulo es 1 que se llama 1 dominante; iv) en las columnas en las que están los 1's dominantes todos los demás elementos de la columna son cero (o sea cada 1 principal es la única entrada no nula en su columna).

Elementos pivote: Si una matriz está en forma escalonada los valores de los coeficientes en sus entradas principales se denominan **pivotes**. Una **posición pivote** de una matriz es una ubicación que corresponde a un 1 principal en la forma escalonada reducida . Una **columna pivote** es una columna que contiene una posición pivote.

Nota: En un sistema de ecuaciones las variables correspondientes a columnas pivote son básicas. El resto serán libres.

Nota: En un sistema de m ecuaciones y n incógnitas escalonado hay tantas columnas pivote en A (en $[A \mid B\,]$) como entradas principales (filas no nulas)

Matrices Escalonadas

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}$$

Matrices Escalonadas Reducidas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

I.2.1.3. Teorema de existencia y unicidad

Una **solución particular** del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es un vector $\vec{x}$ con valores de las incógnitas $x_i = k_i \in K, i = 1,2, \dots n$ que hacen cierta cada ecuación del sistema y se denota por $\vec{x} = (k_1, k_2, .. k_n) \in K^n$.

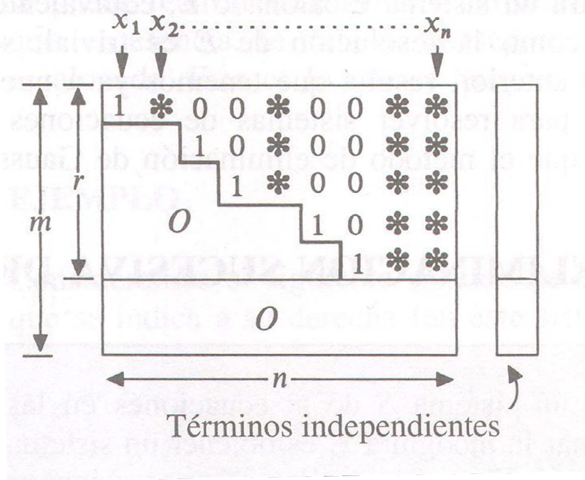
El **conjunto solución** (también llamado solución general o espacio solución) X son todas las soluciones

Teorema. El sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ o bien no tiene solución (incompatible), o tiene una única solución (compatible determinado) o tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado).

Teorema de existencia y unicidad. Sea S un sistema escalonado de m ecuaciones con n incógnitas y sea $[A \mid B]$ su matriz ampliada. De las m filas llamaremos r al número de ellas que tienen en A algún elemento no nulo. Así, las $m - r$ últimas filas solo contienen ceros en A. Se verifica:

1) S es **compatible si** y solo si sus últimos $m - r$ términos independientes son todos nulos, o sea si la columna del extremo derecho de $[A \mid B]$ no es una columna pivote

2) Suponiendo que los $m - r$ últimos términos independientes son nulos, el sistema es compatible **determinado si $r = n$** (en este caso no existen variables libres y hay una única solución) e **indeterminado si $r < n$** (hay al menos una variable libre y por tanto infinitas soluciones).



I.2.2. Resolución de sistemas de ecuaciones

I.2.2.1. Equivalencia por filas

Sistemas equivalentes: Dos sistemas lineales son equivalentes si **tienen el mismo conjunto solución**. Las siguientes operaciones elementales fila transforman un sistema de ecuaciones en otro equivalente:

1. Intercambio: cambiar ecuaciones en el sistema: $[E_1]\ R_i \leftrightarrow R_j$

2. Escalamiento: multiplicar una ecuación por una contante no nula. $[E_2]\ k \cdot R_i \rightarrow R_i\ , k \neq 0$

3. Reemplazo: sumar a una ecuación un múltiplo de otra: $[E_3]\ k' \cdot R_j + R_i \rightarrow R_i\ ,\ k' \neq 0$

Nota: En la práctica, 2 y 3 se hacen en un solo paso $k' \cdot R_j + k \cdot R_i \rightarrow R_i\ , k, k' \neq 0$ pero no es una operación elemental, por lo que no se recomienda. Las operaciones fila son reversibles.

Teorema: Propiedad fundamental de equivalencia. Un sistema de ecuaciones lineales es **equivalente** a cualquiera de los sistemas que resultan de realizar en él una operación elemental en sus filas. Así, si un sistema S' se obtiene de otro S mediante **sucesión finita de operaciones elementales fila**, entonces S y S' tienen el mismo conjunto solución (son equivalentes por filas).

Teorema: Unicidad de la forma escalonada reducida. Todo sistema es equivalente a más de un sistema escalonado por filas, pero a uno y solo un sistema escalonado reducido por filas (independientemente del orden de las operaciones fila).

Notación matricial: Cualquier operación elemental fila en las ecuaciones de un sistema es equivalente a efectuar la misma operación en la filas de la matriz $[A \mid B]$. Así, aplicadas sobre la matriz ampliada las operaciones elementales fila producen la matriz ampliada de un sistema equivalente.

I.2.2.2. Método de Gauss

Eliminación gaussiana: proceso por el que se obtiene un sistema equivalente en el que cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior. Existen dos versiones del método de eliminación:

1) Método de Gauss: usar operaciones elementales para reducir el sistema a uno equivalente escalonado, y usar la sustitución hacia atrás para resolver el sistema (de abajo a arriba, o regresivamente).

2) Método de Gauss-Jordan: usar operaciones elementales para reducir el sistema a su equivalente reducido y despejar directamente de cada una de sus ecuaciones la incógnita.

Descripción paramétrica del conjunto solución:

La resolución del sistema consiste en determinar el conjunto solución. Si el sistema tiene solución:
i) Si no hay variables libres, la solución es única (las variables básicas están determinadas);
ii) Si hay variables libres, hay infinitas soluciones (las variables libres actúan como parámetros).

Paso 1. Asignar a cada variable libre un parámetro (valor escalar) y expresar cada variable básica en función de dichos parámetros

Paso 2. Escribir la solución paramétrica de $\vec{x}$ como un vector cuyas entradas dependen de los parámetros.

Paso 3. Descomponer el vector $\vec{x}$ como combinación lineal de vectores usando como escalares de la combinación lineal a los parámetros de las variables libres.

Método de Gauss

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Box.I.2.1. Método de Eliminación de Gauss-Jordan

Algoritmo A. Método de Eliminación de Gauss. Obtiene una forma escalonada de un sistema de ecuaciones (matriz ampliada). Sea $A = [A \ \vec{b}]$ la matriz ampliada del sistema $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

Paso 1. Encontrar la primera columna no nula que se encuentra más a la izquierda. Supongamos que es j_1. Es una columna pivote.

Paso 2. Si es necesario, intercambiar las filas de forma que aparezca una entrada no nula en la primera fila de la columna pivote j_1 (esto es, conseguir que $a_{1j_1} \neq 0$).

Paso 3. Utilizar a_{1j_1} como pivote para obtener ceros (mediante reemplazo de filas) en todas las posiciones de la columna ubicadas debajo del pivote (o sea, eliminar x_{j_1} de todas las ecuaciones excepto la primera). Para ello, efectuar la operación elemental: $(-a_{ij_1}/a_{1j_1})\,R_1 + R_i \to R_i$ para $i > 1$.

Paso 4. Examinar cada ecuación resultante: a) Si alguna ecuación es degenarada con $b = 0$ puede eliminarse o intercambiarse por la última fila; b) Si alguna ecuación es degenerada con $b \neq 0$, abandonar el algoritmo, pues el sistema es incompatible.

Paso 5. Repetir los pasos 1, 2, 3 y 4 con la submatriz (subsistema) formada por todas las filas excluyendo la primera.

Paso 6. Continuar con los pasos anteriores hasta que el sistema esté en forma escalonada (forma de Gauss) o hasta que se llegue a 4b.

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}$$

Algoritmo B. Método de Eliminación de Gauss-Jordan. Reduce por filas una matriz escalonada a su forma escalonada reducida C_r (la forma canónica por filas). Si $[A\ \vec{b}]$ está en forma escalonada.

Paso 7. Comenzar con el pivote situado más a la derecha a_{rj_r}. Si el pivote no es un 1 principal, aplicar una operación de escalamiento para hacerlo igual a 1; esto es, multiplicar la última fila no nula R_r por $1/a_{rj_r}$ para que la entrada principal sea 1.

Paso 8. Usar $a_{rj_r} = 1$ como pivote para obtener ceros sobre él mediante operaciones elementales de reemplazo de filas; esto es, para $i = r-1, r-2, \ldots, 1$ efectuar $-a_{ij_r}R_r + R_i \to R_i$.

Paso 9. Trabajar hacia arriba y hacia la izquierda repitiendo los pasos 7 y 8 para las filas $R_{r-1}, R_{r-2}, \ldots, R_2$.

Paso 10. Aplicar la operación de escalamiento $\left(1/a_{1j_1}\right) R_1 \to R_1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

I.2.2.3. Sistemas homogéneos e inhomogéneos

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo si se puede escribir de la forma $A\vec{x} = \vec{0}$. A es $m \times n$ y $\vec{0} \in K^m$. Todo sistema inhomogéneo $A\vec{x} = \vec{b}$, tiene un sistema homogéneo asociado $A\vec{x} = \vec{0}$.

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

Nota: En el caso de sistemas homogéneos, trabajar con la matriz ampliada del sistema $[A \mid B]$ es equivalente a hacerlo con la matriz de coeficientes A del sistema.

Teorema. Todo **sistema homogéneo** $A\vec{x} = \vec{0}$ **es compatible** (tiene al menos la solución trivial $\vec{x} = \vec{0}$). Además, si el sistema tiene menos ecuaciones que incógnitas tiene infinitas soluciones.

Teorema. Si un sistema inhomogéneo $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible, entonces su solución general se puede obtener sumando el conjunto solución X del sistema homogéneo asociado $A\vec{x} = \vec{0}$ a una solución particular $\vec{x} = \vec{x}_1$ del sistema inhomogéneo. Esto es $\vec{x} = \vec{x}_1 + X$ es la solución general de $A\vec{x} = \vec{b}$.

Nota: De hecho, si $\vec{x} = \vec{x}_1$ y $\vec{x} = \vec{x}_2$ son dos soluciones particulares distintas de $A\vec{x} = \vec{b}$ entonces $\vec{x} = \vec{x}_1 + k(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{x}_1 + X$ es la solución general del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ y $X = k(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$ es la solución general del sistema homogéneo asociado $A\vec{x} = \vec{0}$.